PROVA D'ESAME • SESSIONE STRAORDINARIA 2024

Liceo scientifico, opzione scienze applicate e indirizzo sportivo

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.
Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche o grafiche purché non siano dotate della capacità di elaborazione simbolica algebrica e non abbiano la disponibilità di connessione a Internet.

PROBLEMA 1

Sia data la seguente funzione parametrica:

$$y = x^3 + ax^2 + c.$$

a. Si dimostri che per ogni valore dei parametri reali a e c ($a \neq 0$), il flesso coincide con il punto medio del segmento che ha per estremi i punti di minimo relativi.

b. Si determinino i valori dei parametri affinché la funzione abbia il massimo in $x = -2$ e abbia un flesso di ordinata 6.

c. Si disegni quindi il grafico della funzione $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4$, e si calcoli l'area della regione finita di piano compresa tra la funzione, l'asse delle ascisse, l'asse delle ordinate e la retta di equazione $x = -2$.

d. Si dimostri infine che la funzione $f(x)$ è simmetrica rispetto al suo punto di flesso. Successivamente, si applichi alla funzione $f(x)$ la traslazione di vettore $\vec{v}(\alpha; \beta)$. Determinare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ affinché la funzione traslata risulti dispari.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione $f(x) = e^{-x^2}$.

a. Tracciare, nel medesimo sistema di riferimento, il grafico γ_1 della funzione $f(x)$ e il grafico γ_2 della sua funzione derivata, individuando i loro asintoti, estremi e flessi. Successivamente scrivere le coordinate del punto P in cui γ_1 e γ_2, si intersecano.

b. La retta di equazione $x = t$, $t \in \mathbb{R}$ incontra γ_1 e γ_2, rispettivamente, nei punti P_1 e P_2. Determinare il valore del parametro t, in modo che la misura del segmento che unisce i due punti abbia misura massima e calcolare il valore di tale misura.

c. Sia γ_3 il grafico rappresentativo della funzione $f''(x)$. Calcolare l'area della regione finita delimitata da γ_2 e γ_3.

d. Posto $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$, calcolare il $\lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{f'(x)}$ spiegando perché, in $x = 0$, le funzioni $F(x)$ ed $f'(x)$ sono infinitesime dello stesso ordine.

QUESTIONARIO

1 Sia data una circonferenza Γ e siano $A\widehat{C}B$ e $A\widehat{D}B$ angoli alla circonferenza che insistono sull'arco AB, con AC parallelo a DB. Detto O il punto di intersezione di BC e AD, dimostrare che i triangoli ACO e BOD sono isosceli e simili fra di loro.

2 Lanciando due dadi regolari a sei facce, qual è la probabilità di:

- ottenere somma 10;
- ottenere per somma un numero multiplo di 2 o di 3;
- ottenere per somma un numero multiplo di 2 e di 3.

3 Il centro di una superficie sferica S è il punto di intersezione tra la retta r individuata dalle equazioni

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 3x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

e la retta t passante per i punti $A(-2; 3; 0)$ e $B\ (2; -1; 2)$. La superficie S è inoltre tangente al piano α di equazione $4x - 2y - 4z + 1 = 0$. Qual è l'equazione di S?

4 Determinare il valore del parametro reale $k > 1$ in modo che il valor medio della funzione

$$f(x) = \ln(x^3) + \frac{3x - 3}{x}$$

sull'intervallo $[1; k]$ sia uguale a $1 - \ln\left(\frac{5}{2}\right)$.

5 Individuare e classificare i punti in cui la funzione $f(x) = |x - 1| + \sqrt[3]{x^3 + x^2}$ è continua ma non derivabile.

6 Determinare l'equazione di una funzione polinomiale di primo grado $y = f(x)$ tale che

$i)\ \int_0^1 f(x)dx = 1;$

$ii)\ \int_0^2 f(x)dx = 2.$

7 In un sistema di riferimento cartesiano Oxy, l'equazione $xy = k$, con k parametro reale non nullo, rappresenta un'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti. Si dimostri che le rette tangenti nei suoi vertici sono perpendicolari alle bisettrici dei quadranti del sistema di riferimento considerato.

8 Scrive Paolo Giordano ne *La solitudine dei numeri primi*: «I numeri primi sono divisibili soltanto per 1 e per sé stessi. Se ne stanno al loro posto nell'infinita serie dei numeri naturali, schiacciati come tutti fra due, ma un passo in là rispetto agli altri».
Si considerino la funzione $f(x) = x^p$ e la sua derivata $(p - 1)$-esima f^{p-1}. Si può dimostrare che, se p è un numero primo, allora p divide $f^{p-1} + 1$. Verificare la correttezza di tale affermazione per tutti i numeri primi minori di 10.

PROBLEMA 1

a. La funzione polinominale $y = x^3 + ax^2 + c$ esiste, è continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$.
La derivata prima vale: $y' = 3x^2 + 2ax$, e si annulla per:

$$x(3x + 2a) = 0 \rightarrow x = 0 \vee x = -\frac{2}{3}a.$$

Se $a > 0$ abbiamo un punto di massimo in $M_1\left(-\frac{2}{3}a; \frac{4}{27}a^3 + c\right)$ e un punto di minimo in $m_1(0; c)$.

Se $a < 0$ abbiamo un punto di massimo in $M_2(0; c)$ e un punto di minimo in $m_2\left(-\frac{2}{3}a; \frac{4}{27}a^3 + c\right)$.

In entrambi i casi, le coordinate dei punti estremi relativi sono le medesime.

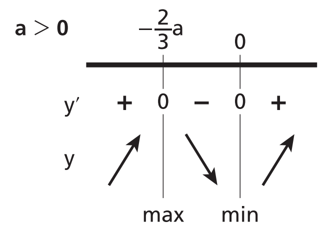
La derivata seconda vale: $y'' = 6x + 2a$ e si annulla per $x = -\frac{a}{3}$.

Si ha un punto di flesso in $F\left(-\frac{a}{3}; \frac{2}{27}a^3 + c\right)$.

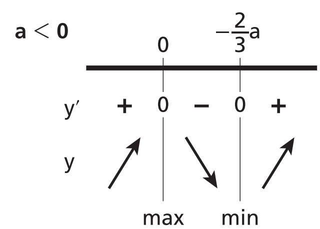
Il punto medio tra i due punti estremi relativi della funzione proposta ha coordinate:

$$\left(\frac{-\frac{2}{3}a + 0}{2}; \frac{\frac{4}{27}a^3 + c + c}{2}\right) = \left(-\frac{a}{3}; \frac{2}{27}a^3 + c\right),$$

che coincidono con le coordinate del punto di flesso.



■ **Figura 1**

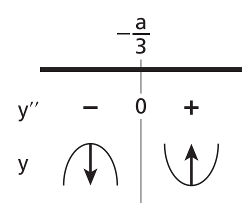


■ **Figura 2**

b. Affinché la funzione abbia un massimo in $x = -2$ deve essere $a > 0$ e risultare che $-\frac{2}{3}a = -2 \rightarrow a = 3$.

L'ordinata del flesso che è $\frac{2}{27}a^3 + c$ deve valere 6:

$$\frac{2}{27} \cdot 3^3 + c = 6 \rightarrow 2 + c = 6 \rightarrow c = 4.$$



■ **Figura 3**

Quindi la funzione richiesta è $y = f(x) = x^3 + 3x^2 + 4$.

c. Per disegnare il grafico di $f(x)$, operiamo i seguenti passaggi:

- *Dominio*: $D = \mathbb{R}$.
  Inoltre, $f(-x) = -x^3 + 3x^2 + 4$, per cui la funzione non è né pari né dispari;
- *intersezioni con gli assi*: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases} \rightarrow A(0; 4)$

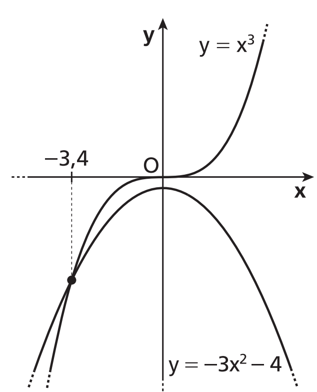
  $\begin{cases} y = 0 \\ y = x^3 + 3x^2 + 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^3 + 3x^2 + 4 = 0 \end{cases}$.

  L'equazione $x^3 + 3x^2 + 4 = 0$ non ha soluzioni razionali. Per via grafica si può determinare un unico zero approssimato che vale circa $x_0 \simeq -3{,}4$;

- *segno*: $x^3 + 3x^2 + 4 > 0$ se $x > x_0$ utilizzando il precedente grafico;
- *limiti*: $\lim_{x \to +\infty}(x^3 + 3x^2 + 4) = \lim_{x \to +\infty} x^3\left(1 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^3}\right) = +\infty$;

  $\lim_{x \to -\infty}(x^3 + 3x^2 + 4) = \lim_{x \to -\infty} x^3\left(1 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^3}\right) = -\infty$.

  La funzione cubica non presenta asintoti.



■ **Figura 4**

- *derivata prima*: Utilizzando i calcoli eseguiti nel punto a) risulta che la funzione ha un massimo relativo in $M(-2; 8)$ e un minimo relativo in $m(0; 4)$, è crescente per $x < -2 \vee x > 0$ e decrescente per $-2 < x < 0$.
- *derivata seconda*: Utizzando i calcoli eseguiti nel punto a), risulta che la funzione ha un punto di flesso in $F(-1; 6)$, volge la concavità verso l'alto per $x > -1$ e verso il basso per $x < -1$.

L'area della regione finita di piano richiesta si può calcolare mediante l'integrale definito:

$$\int_{-2}^{0}(x^3 + 3x^2 + 4)dx = \left[\frac{x^4}{4} + x^3 + 4x\right]_{-2}^{0} = 0 - (4 - 8 - 8) = 12.$$

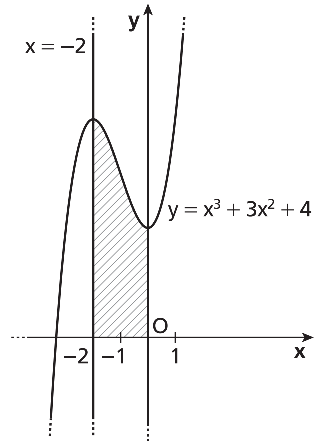


Figura 5

d. Le equazioni della simmetria di centro $F(-1; 6)$ sono:

$\begin{cases} x' = -2 - x \\ y' = 12 - y \end{cases}$, la cui inversa ha equazione: $\begin{cases} x = -2 - x' \\ y = 12 - y' \end{cases}$.

Applichiamo la simmetria all'equazione della funzione:

$$12 - y' = (-2 - x')^3 + 3(-2 - x')^2 + 4.$$

Togliendo gli apici si ha:

$$\cancel{12} - y = -8 - \cancel{12x} - 6x^2 - x^3 + \cancel{12} + \cancel{12x} + 3x^2 + 4 \quad \rightarrow \quad y = x^3 + 3x^2 + 4,$$

che coincide con l'equazione della funzione di partenza, che risulta simmetrica rispetto a F.
Una funzione è dispari se il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine degli assi. Abbiamo dimostrato che la funzione considerata è simmetrica rispetto al punto di flesso: per ottenere una funzione dispari è sufficiente applicare una traslazione $\vec{v}$ che porti il flesso $F(-1; 6)$ nell'origine:

$$\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 6 \end{cases}.$$

Il vettore di traslazione deve essere quindi $\vec{v}(1; -6)$.

PROBLEMA 2

a. Studiamo il grafico γ_1 della funzione $f(x) = e^{-x^2}$ definita, continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$.
La funzione è pari poiché $f(-x) = e^{-(-x^2)} = e^{-x^2} = f(x)$, quindi possiamo limitarci al solo caso $x \geq 0$ e utilizzare la simmetria rispetto all'asse y per completare il grafico.
La funzione è positiva in ogni punto del suo dominio perché e^{-x^2} è una quantità sempre positiva (motivo per cui d'ora in poi eviteremo di studiare il segno di e^{-x^2}), non interseca perciò l'asse x mentre interseca l'asse delle ordinate in $(0; 1)$.
La funzione non presenta asintoti verticali né punti di singolarità, mentre agli estremi del dominio ha asintoto orizzontale $y = 0$, poiché $\lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{-x^2} = 0$.

Calcoliamo ora il segno della derivata prima $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ per cercare eventuali punti stazionari.

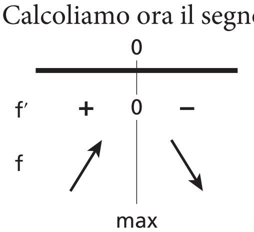


Figura 6

$f'(x) \geq 0$ per $x \leq 0$, quindi f ha massimo relativo in $(0; 1)$ che è anche massimo assoluto in quanto la funzione è crescente a sinistra di 0 e decrescente a destra.

Studiamo infine il segno della derivata seconda per studiare la concavità di f:

$$f''(x) = -2e^{-x^2} - 2x \cdot (-2x)e^{-x^2} = e^{-x^2}(-2 + 4x^2) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1).$$

Quando $f''(x) > 0$, ossia $2x^2 - 1 > 0 \quad \to x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee x > \frac{\sqrt{2}}{2}$, la funzione ha concavità verso l'alto, mentre in $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ la funzione ha la concavità rivolta verso il basso. In $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ la funzione presenta un cambio di concavità e $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}}$, quindi $F_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; e^{-\frac{1}{2}}\right)$ e $F_2\left(+\frac{\sqrt{2}}{2}; e^{-\frac{1}{2}}\right)$ sono flessi a tangente obliqua.
Inseriamo le informazioni ottenute in un piano cartesiano.

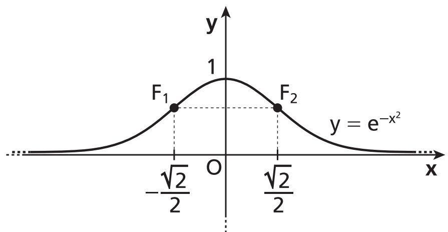


Figura 7

Consideriamo γ_2 il grafico di $g(x) = f'(x) = -2xe^{-x^2}$. La funzione è definita, continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$, è dispari perché derivata di una funzione pari e interseca gli assi cartesiani in (0; 0).
Per le considerazioni fatte in precedenza, possiamo affermare che $g(x) > 0 \to -2x > 0 \to x < 0$.
Inoltre g non presenta asintoti verticali né altri punti di singolarità. Agli estremi del dominio, la funzione ha come asintoto orizzontale l'asse x poiché $\lim_{x\to\pm\infty} 2xe^{-x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2x}{e^{x^2}} = 0$ per gerarchia degli infiniti.
Studiamo il segno della derivata prima di g, che coincide con la derivata seconda di f:

$$g'(x) = f''(x) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1),$$

per cui la funzione è crescente per $x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ e decrescente per $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

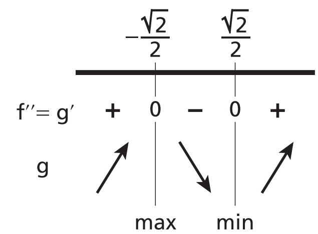


Figura 8

Poiché $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}\,e^{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{\frac{2}{e}} \simeq 0{,}858$, abbiamo $M_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\sqrt{\frac{2}{e}}\right)$ minimo relativo e $M_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{\frac{2}{e}}\right)$ massimo relativo per simmetria rispetto all'origine.

Calcoliamo ora la derivata seconda di g:

$$g''(x) = f'''(x) = 2(-2x)e^{-x^2}(2x^2 - 1) + 2e^{-x^2} \cdot 4x = 4xe^{-x^2}(3 - 2x^2),$$

e studiamo il suo segno:

$$4x > 0 \quad \to \quad x > 0;$$

$$3 - 2x^2 > 0 \quad \to \quad -\frac{\sqrt{6}}{2} < x < \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

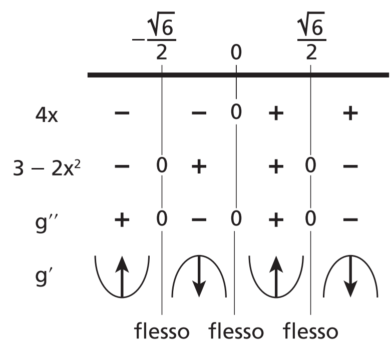
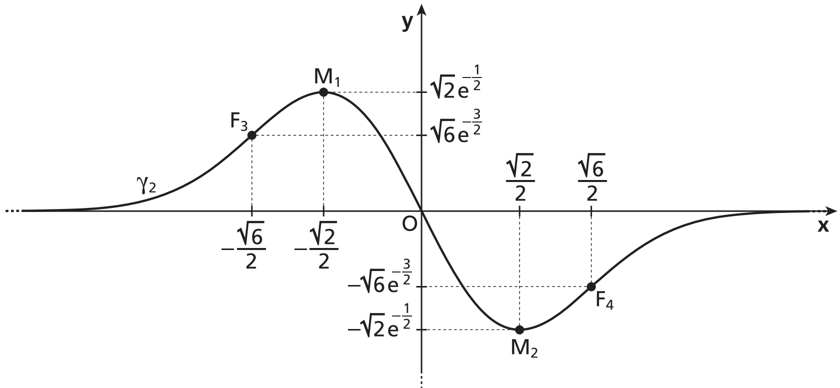


Figura 9

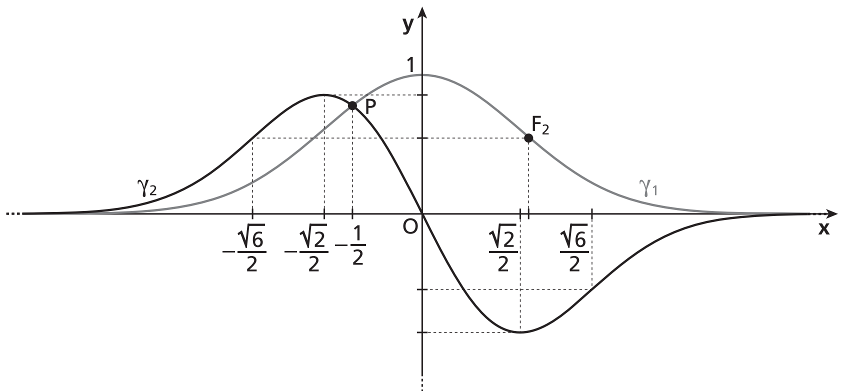
La concavità della funzione è rivolta verso l'alto per $x < -\frac{\sqrt{6}}{2} \vee 0 < x < \frac{\sqrt{6}}{2}$, verso il basso per $-\frac{\sqrt{6}}{2} < x < 0$, quindi i punti $F_3\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}; \sqrt{6}\,e^{-\frac{3}{2}}\right)$, $O(0; 0)$ e $F_4\left(\frac{\sqrt{6}}{2}; -\sqrt{6}\,e^{-\frac{3}{2}}\right)$ (per simmetria rispetto all'origine) sono flessi a tangente obliqua.

Inseriamo le informazioni ottenute e tracciamo il grafico di γ_2 nel piano cartesiano.



■ **Figura 10**

Rappresentiamo γ_1 e γ_2 nello stesso piano cartesiano e otteniamo:

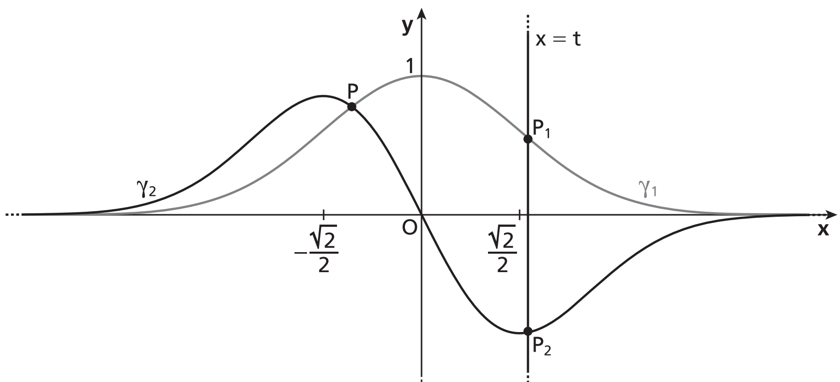


■ **Figura 11**

Le coordinate del punto P di intersezione fra γ_1 e γ_2 sono:

$$\begin{cases} y = e^{-x^2} \\ y = -2xe^{-x^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} e^{-x^2} = -2xe^{-x^2} \\ y = e^{-x^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} e^{-x^2}(2x+1) = 0 \\ y = e^{-x^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = e^{-\frac{1}{4}} \end{cases}.$$

b. Intersecando i grafici di γ_1 e γ_2 con la retta $x = t$, $t \in \mathbb{R}$ otteniamo i punti $P_1(t; e^{-t^2})$ e $P_2(t; -2te^{-t^2})$.



■ **Figura 12**

Indichiamo con $h(t)$ la funzione obiettivo che descrive la lunghezza del segmento P_1P_2:

$$h(t) = \left| y_{P_1} - y_{P2} \right| = \left| e^{-t^2} + 2te^{-t^2} \right| = \left| e^{-t^2}(2t+1) \right| = e^{-t^2} \left| 2t+1 \right|,$$

$$h(t) = \begin{cases} e^{-t^2}(2t+1) & \text{per } t \geq -\dfrac{1}{2} \\ -e^{-t^2}(2t+1) & \text{per } t < -\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Determiniamo il massimo della funzione $h(t)$ mediante lo studio della derivata prima:

$$h'(t) = -2te^{-t^2}(2t+1) + 2e^{-t^2} = 2e^{-t^2}(-2t^2 - t + 1), \text{ per } t \geq \frac{1}{2}.$$

$$h'(t) = \begin{cases} 2e^{-t^2}(-2t^2 - t + 1) & \text{per } t > -\frac{1}{2} \\ 2e^{-t^2}(2t^2 + t - 1) & \text{per } t < -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Per $t \geq -\frac{1}{2}$, $2e^{-t^2}(-2t^2 - t + 1) > 0 \rightarrow -2t^2 - t + 1 > 0 \rightarrow -1 < t < \frac{1}{2}$.

Quindi $t = \frac{1}{2}$ è un punto di massimo relativo e $h\left(\frac{1}{2}\right) = 2e^{-\frac{1}{4}} \simeq 1{,}56$ è un massimo relativo.

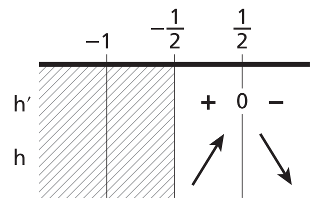


Figura 13

Per $t < -\frac{1}{2}$, $2e^{-t^2}(2t^2 + t - 1) > 0 \rightarrow 2t^2 + t - 1 > 0 \rightarrow t < -1 \vee t > \frac{1}{2}$.
Quindi $t = -1$ è un punto di massimo relativo e $h(-1) = e^{-1} \simeq 0{,}37$ è un massimo relativo.

Per $t = \frac{1}{2}$, abbiamo verificato nel punto precedente che i grafici γ_1 e γ_2 si intersecano, quindi la distanza fra le curve è nulla. Il valore massimo della misura del segmento è dunque $2e^{-\frac{1}{4}}$.

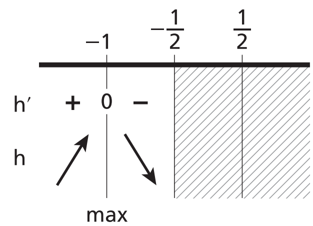


Figura 14

c. Per disegnare il grafico qualitativo di γ_3, derivata prima di $g(x)$ e derivata seconda di $f(x)$, riordiniamo le informazioni già viste in precedenza. Poniamo $h(x) = f''(x)$.
La funzione $h(x)$ ha dominio $\mathbb{R}$, è pari perché derivata di una funzione dispari, e si annulla nei punti in cui $g(x)$ ha massimo e minimo relativi, quindi $h(x) = 0$ per $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Inoltre:

$$h(x) > 0 \text{ dove } g(x) \text{ cresce, per } x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee x > \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$h(x) < 0 \text{ dove } g(x) \text{ decresce, per } -\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

La funzione $h(x)$ non ha asintoti verticali e ha come asintoto orizzontale le retta $y = 0$; infatti:

$$\lim_{x \to \pm\infty} 2e^{-x^2}(2x^2 - 1) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2(2x^2 - 1)}{e^{x^2}} = 0,$$

per la gerarchia degli infiniti.
I punti di flesso a tangente obliqua di $g(x)$ sono i punti stazionati di $h(x)$ e, dallo studio del segno di $g''(x)$, possiamo dedurre che per $x = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$ la funzione assume valori massimi, mentre O è minimo relativo.

Il grafico di $h(x)$ risulta essere il seguente.

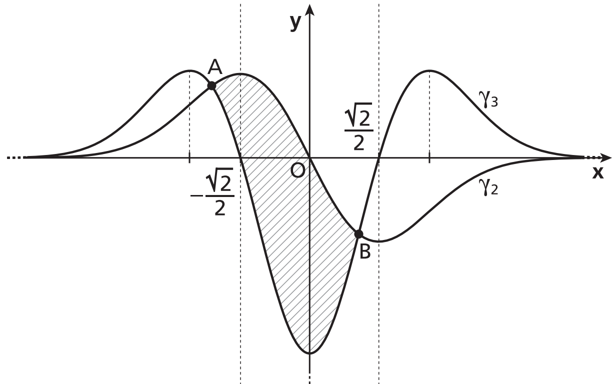


Figura 15

Per calcolare l'area della regione di piano delimitata fra γ_3 e γ_2 determiniamo le ascisse dei loro punti di intersezione:

$$\begin{cases} y = 2e^{-x^2}(2x^2-1) \\ y = -2xe^{-x^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2e^{-x^2}(2x^2-1) = -2xe^{-x^2} \\ y = -2xe^{-x^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x^2+x-1=0 \\ y = -2xe^{-x^2} \end{cases} \rightarrow \quad x=-1 \vee x=\frac{1}{2},$$

e calcoliamo l'integrale definito

$$\int_{-1}^{\frac{1}{2}} [-2xe^{-x^2} - 2e^{-x^2}(2x^2-1)]dx = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} [-2e^{-x^2}(2x^2+x-1)]dx.$$

Questo integrale non è immediato, né si riesce agevolmente a risolverlo mediante il metodo di sostituzione o per parti. In questo caso conviene osservare che la funzione integranda è la differenza di due funzioni che rappresentano derivate successive di una stessa funzione f, quindi poiché la derivata è un operatore lineare, possiamo utilizzare la formula di Leibniz-Newton:

$$\int_{-1}^{\frac{1}{2}} (f'(x) - f''(x))dx = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (f(x) - f'(x))' dx = [f(x) - f'(x)]_{-1}^{\frac{1}{2}} =$$

$$[e^{-x^2} - (-2xe^{-x^2})]_{-1}^{\frac{1}{2}} = [e^{-x^2}(1+2x)]_{-1}^{\frac{1}{2}} = 2e^{-\frac{1}{4}} + e^{-1}.$$

d. $\lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{f'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x e^{-t^2} dt}{-2xe^{-x^2}} = \left[\frac{0}{0}\right]$, che è una forma indeterminata.

Entrambe le funzioni al numeratore e al denominatore sono continue e derivabili e $(-2xe^{-x^2})' \neq 0$ per $x = 0$, quindi possiamo applicare il teorema di De L'Hospital e utilizzare il teorema fondamentale del calcolo integrale al numeratore, per cui

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x e^{-t^2} dt}{-2xe^{-x^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-x^2}}{2e^{-x^2}(2x^2-1)} = -\frac{1}{2}.$$

Le funzioni $F(x)$ e $f'(x)$ sono infinitesimi perché entrambe tendono a zero, per $x \to 0$, e sono dello stesso ordine perché il limite del loro rapporto per $x \to 0$ tende a un numero finito non nullo.

QUESTIONARIO

1 Sulla circonferenza Γ, tracciamo gli angoli $A\widehat{C}B$ e $A\widehat{D}B$ alla circonferenza, che insistono sull'arco $\overset{\frown}{AB}$, e sia O il punto in cui BC incontra DA.
Per il teorema degli angoli alla circonferenza risulta che $A\widehat{C}B \cong A\widehat{D}B$.
Inoltre per ipotesi $AC \parallel BD$ e tagliate dalla trasversale AD formano gli angoli $B\widehat{D}A$ e $D\widehat{A}C$ alterni interni tra loro congruenti per cui il triangolo AOC è isoscele avendo due angoli congruenti sulla base AC. Analogamente, anche il triangolo BOD è isoscele sulla base BD, essendo anche $D\widehat{B}C \cong B\widehat{C}A$ perché angoli alterni interni considerando la trasversale BC. Questo è sufficiente anche per dimostrare che i triangoli ACO e BOD sono simili avendo i tre angoli congruenti poiché $D\widehat{O}B \cong C\widehat{O}A$ sono opposti al vertice e quindi vale il primo criterio di similitudine dei triangoli.

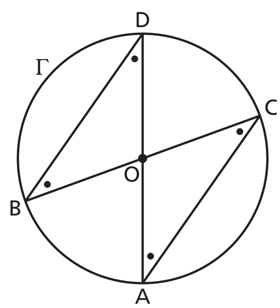


Figura 16

2 Lanciando due dadi regolari a sei facce le possibili uscite sono $D'_{6,2} = 6^2 = 36$.

a. Per ottenere come somma 10, i possibili casi favorevoli sono tre: (4; 6), (5; 5) e (6; 4).
Quindi la probabilità dell'evento vale: $p = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

b. La somma delle uscite dei due dadi, che corrispondono a un multiplo di 2 o di 3, sono 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10 e 12.
Le sole somme escluse sono 5, 7 e 11; si può quindi calcolare la probabilità dell'evento contrario:

somma 5: (1; 4) (2; 3), (3; 2), (4; 1);

somma 7: (1; 6) (2; 5), (3; 4), (4; 3), (5; 2), (6; 1);

somma 11: (5; 6) (6; 5).

Quindi 12 sono i casi non favorevoli, per cui la probabilità richiesta vale: $p = 1 - \frac{\cancel{12}^1}{\cancel{36}_3} = \frac{2}{3}$.

c. Le somme che corrispondono a un numero multiplo di 2 e di 3 sono solo 6 e 12:

somma 6: (1; 5) (2; 4), (3; 3), (4; 2) (5; 1);

somma 12: (6; 6).

Questi sono i 6 casi favorevoli, per cui la possibilità richiesta vale $p = \frac{\cancel{6}^1}{\cancel{36}_6} = \frac{1}{6}$.

3 La retta t ha vettore di direzione $\overrightarrow{AB}(4; -4; 2)$ e una sua possibile equazione parametrica è:

$$t: \begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 3 - 4t \\ z = 2t \end{cases} \quad \text{con } t \in \mathbb{R}.$$

Per calcolare le coordinate del centro C della superficie sferica S calcoliamo il punto di intersezione fra le rette r e t:

$$r \cap t: \begin{cases} -2 + \cancel{4t} + 3 - \cancel{4t} - 4t = 0 \\ \cancel{-6} + 12t \cancel{+6} - 8t - 1 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} t = \frac{1}{4} \\ t = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

Quindi il centro C ha coordinate $C\left(-1; 2; \frac{1}{2}\right)$.

Essendo il piano α di equazione $4x - 2y - 4z + 1 = 0$ tangente alla superficie sferica S, il raggio r di S è la distanza di C da α e quindi risulta:

$$r = \frac{|-4 - 4 - 2 + 1|}{\sqrt{16 + 4 + 16}} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}.$$

L'equazione della superficie sferica S è quindi:

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2,$$

che semplificata è:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - z + 3 = 0.$$

4 La funzione $f(x) = \ln(x^3) + \frac{3x-3}{x}$ è definita per $x > 0$ ed è continua nel suo dominio, quindi è definita e continua anche nell'intervallo $[1; k]$, con $k > 1$.

Per calcolare una primitiva di $f(x)$ riscriviamo la funzione come: $f(x) = 3\ln x + 3 - \frac{3}{x}$ e calcoliamo una primitiva di $\ln x$ integrando per parti.

Risulta:

$$\int\left(3\ln x + 3 - \frac{3}{x}\right)dx = 3x\ln|x| - \cancel{3x} + \cancel{3x} - 3\ln|x| + c = 3(x-1)\ln|x| + c.$$

Il valor medio integrale di $f(x)$ nell'intervallo $[1; k]$ vale:

$$\frac{1}{k-1}[3(x-1)\ln x]_1^k = \frac{3\ln k \cdot \cancel{(k-1)} - 0}{\cancel{k-1}} = 3\ln k.$$

Deve risultare quindi:

$$3\ln k = 1 - \ln\left(\frac{5}{2}\right) \quad \to \quad \ln k^3 = \ln\frac{2e}{5} \quad \to \quad k^3 = \frac{2e}{5} \quad \to \quad k = \sqrt[3]{\frac{2e}{5}} \simeq 1{,}03,$$

il valore di k è maggiore di 1 e quindi è accettabile.

5 La funzione $f(x) = |x-1| + \sqrt[3]{x^3+x^2}$ è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$.
Scriviamo $f(x)$ come una funzione definita a tratti:

$$f(x) = \begin{cases} x-1+\sqrt[3]{x^3+x^2} & \text{se } x \geq 1 \\ 1-x+\sqrt[3]{x^3+x^2} & \text{se } x < 1 \end{cases}.$$

Calcoliamo la derivata prima della funzione.
Poiché $\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)' = \left((x^3+x^2)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}(x^3+x^2)^{-\frac{2}{3}}(3x^2+2x) = \frac{3x^2+2x}{3\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2}}$ per $x^3+x^2 \neq 0$,

quindi per $x \neq 0 \wedge x \neq -1$, possiamo scrivere

$$f'(x) = \begin{cases} 1+\dfrac{3x^2+2x}{3\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2}} & \text{se } x > 1 \\ -1+\dfrac{3x^2+2x}{3\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2}} & \text{se } x < 1 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq -1 \end{cases}.$$

Analizziamo i punti di non derivabilità.

- Per $x = 0$, abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+}\left(-1+\frac{3x^2+2x}{3\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2}}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(-1+\frac{3x^2+2x}{3\sqrt[3]{[x^2(x+1)]^2}}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(-1+\frac{x(3x+2)}{3\sqrt[3]{x^4(x+1)^2}}\right) =$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(-1+\frac{\cancel{x}(3x+2)}{3\cancel{x}\sqrt[3]{x(x+1)^2}}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(-1+\frac{3x+2}{3\sqrt[3]{x(x+1)^2}}\right) = +\infty.$$

Analogamente si dimostra $\lim_{x\to 0^-}\left(-1+\frac{3x^2+2x}{3\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2}}\right) = \lim_{x\to 0^-}\left(-1+\frac{3x+2}{3\sqrt[3]{x(x+1)^2}}\right) = -\infty$,

perché $\lim_{x\to 0^+} 3\sqrt[3]{x(x+1)^2} = 0^+$ mentre $\lim_{x\to 0^-} 3\sqrt[3]{x(x+1)^2} = 0^-$; quindi $x = 0$ è un punto di cuspide.

- Per $x = -1$, abbiamo

$$\lim_{x\to -1^+}\left(-1+\frac{3x^2+2x}{3\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2}}\right) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to -1^-}\left(-1+\frac{3x^2+2x}{3\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2}}\right) = +\infty,$$

perché $\lim_{x\to -1^+}\left(\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2}\right) = \lim_{x\to -1^-}\left(\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2}\right) = 0^+$; quindi $x = 0$ è un punto di flesso a tangente verticale.

- Per $x = 1$, abbiamo

$$\lim_{x\to 1^+}\left(1+\frac{3x^2+2x}{3\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2}}\right) = 1+\frac{5}{3\sqrt[3]{4}} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 1^-}\left(-1+\frac{3x^2+2x}{3\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2}}\right) = -1+\frac{5}{3\sqrt[3]{4}}.$$

I limiti sono finiti e diversi, quindi $x = 1$ è un punto angoloso.

6 Una funzione polinomiale di primo grado ha espressione algebrica $f(x) = ax + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.
La funzione è definita e continua su $\mathbb{R}$, quindi integrabile su $\mathbb{R}$.
Calcoliamo gli integrali e imponiamo le condizioni richieste:

i) $\int_0^1 (ax+b)dx = \left[a\frac{x^2}{2}+b\,x\right]_0^1 = \frac{a}{2}+b;$

ii) $\int_1^2 (ax+b)dx = \left[a\frac{x^2}{2}+b\,x\right]_1^2 = 2a+2b-\frac{a}{2}-b = \frac{3}{2}a+b.$

Quindi otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} \frac{a}{2}+b=1 \\ \frac{3}{2}a+b=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=2-2b \\ \frac{3}{2}(2-2b)+b=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=2-2b \\ 3-3b+b=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=\frac{1}{2} \end{cases}.$$

La funzione cercata è $f(x) = x+\frac{1}{2}$.

7 In un sistema cartesiano Oxy, possiamo scrivere l'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti come una funzione $y = f(x) = \frac{k}{x}$, con $k \neq 0$ e dominio $x \neq 0$.

I vertici della iperbole si possono trovare intersecando la funzione con la bisettrice del primo e terzo quadrante se $k > 0$, con la bisettrice del secondo e quarto quadrante se $k < 0$. Distinguiamo i due casi.

<u>Caso $k > 0$</u>

Le coordianate dei vertici sono:

$$\begin{cases} y = x \\ y = \frac{k}{x} \end{cases} \to \begin{cases} x = \frac{k}{x} \\ y = x \end{cases} \to \begin{cases} x^2 = k \\ y = x \end{cases} \to \begin{cases} x = -\sqrt{k} \\ y = -\sqrt{k} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \sqrt{k} \\ y = \sqrt{k} \end{cases},$$

quindi $V_1(-\sqrt{k}; -\sqrt{k})$ e $V_2(\sqrt{k}; \sqrt{k})$.

Le rette tangenti nei vertici hanno equazione $y - f(x_V) = f'(x_V)(x - x_V)$, i coefficienti angolari delle rette tangenti assumono il valore della derivata prima calcolata nelle ascisse dei vertici.

Calcoliamo la derivata prima della funzione:

$$f'(x) = \left(-\frac{k}{x}\right)' = -\frac{k}{x^2}, \text{ con } k > 0 \text{ e } x \neq 0.$$

Per $x_V = \pm\sqrt{k}$, abbiamo $f'(\pm\sqrt{k}) = -\frac{k}{(\pm\sqrt{k})^2} = -\frac{k}{k} = -1.$

Le rette tangenti in $x = \pm\sqrt{k}$, $k > 0$, hanno coefficiente angolare -1 e sono entrambe perpendicolari alla retta $y = x$ che ha coefficiente angolare 1, reciproco e opposto di -1.

<u>Caso $k < 0$</u>

In modo analogo si dimostra che le coordinate dei vertici sono $V_3(-\sqrt{-k}; \sqrt{-k})$ e $V_4(\sqrt{-k}; \sqrt{-k})$, che $f'(x) = \left(-\frac{k}{x}\right)' = -\frac{k}{x^2}$, con $k < 0$ e $x \neq 0$. Inoltre, per $x_V = \pm\sqrt{-k}$, abbiamo

$$f'(x) = (\pm\sqrt{-k})' = -\frac{k}{(\pm\sqrt{-k})^2} = -\frac{k}{-k} = 1.$$

Anche in questo caso, le rette tangenti sono entrambe perpendicolari alla retta $y = -x$ che ha coefficiente angolare -1, reciproco e opposto di 1.

8 Consideriamo la funzione $f(x) = x^p$. La funzione è definita, continua e derivabile in $\mathbb{R}$.

Consideriamo p primo e $f^{(p-1)}(x) = \underbrace{p \cdot (p-1) \cdot \cdots \cdot 2x}_{\text{(p – 1 fattori)}}$

Il polinomio ha coefficienti naturali, ma possiamo distinguere due casi.

1. Se consideriamo il polinomio a valori reali, tutti i numeri reali lo dividono, non solo quelli primi, quindi l'affermazione è *falsa*.
2. Se consideriamo il polinomio a valori naturali, allora dimostriamo l'affermazione per induzione:
   - verifichiamo il caso $p = 2$;
   - supponiamo verso l'affermazione per p;
   - dimostriamo l'affermazione per $p + 1$.

Per $p = 2$, $f(x) = x^2$. Calcoliamo $f'(x) = 2x$ ma $p = 2$ non divide $2x + 1$ che assume valore dispari per ogni x naturale, quindi l'affermazione è *falsa* perché non verifica la prima richiesta della dimostrazione.

Verifichiamo per gli altri primi minori di 10.

Per $p = 3$, $f(x) = x^3$.

$f^{(2)}(x) = 3 \cdot 2x = 6x$ ma 3 non divide $3x + 1$, la cui somma delle cifre sarà un numero successivo a un multiplo di 3, quindi non divisibile per 3 per ogni x naturale;

per $p = 5$, $f(x) = x^5$

$f^{(4)}(x) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2x$ ma 5 non divide $120x + 1$, che assume un valore che finisce con la cifra 1, quindi non divisibile per 5 per ogni x naturale;

per $p = 7$, $f(x) = x^7$

$f^{(6)}(x) = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2x$ ma 7 non divide $5040x + 1$ che assume il valore di un numero successivo a uno divisibile per 7 (7 divide 5040), quindi non divisibile per 7 per ogni x naturale.